

# Proyecto de Mecánica: Lanzamiento de un cohete y puesta en órbita de carga útil, QP 2018

ENTREGA: Día del examen final

Constantes  $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 kg s^{-2}$ ,  $R_T = 6,378 \times 10^6 m$ ,  $M_T = 5,98 \times 10^{24} kg$ .

## I. Información sobre el cohete.

Considerad un cohete de características similares a Saturno V. Para evitar que los tripulantes sufran aceleraciones excesivamente elevadas, cada una de las dos fases del cohete se divide en subfases, en las cuales disminuye el empuje de los motores (Thrust, T). Completad la siguiente tabla a partir de los datos que os proporcionamos para cada subfase.

(SUB)STAGE	$M_{\text{initial}}$ (tones)	$t_{\text{initial}}$ (s)	$t_{\text{final}}$ (s)	T(MN)	$u$ (m/s)	$\eta = T/u$
S1.0	2.97	0	135	36.00	2000	
S1.1		135	150	30.00	2000	
S2.0		150	440	4.00	4100	
S2.1		440	480	1.50	4100	
S2.2		480	550	0.74	4100	

## II. Lanzamiento de un cohete desde la superficie terrestre: Primera fase.

### II.2 Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (subfases 1.0 y 1.1). Despreciad los efectos de Coriolis y la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (y suponiendo la Tierra en reposo). Utilizando el método de Euler para integración, determina la aceleración  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , la velocidad  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y la posición del cohete  $\vec{r} = (x, y, z)$  en función del tiempo a lo largo de la primera fase. No déis los resultados en forma de tabla de valores numéricos, sino representándolos gráficamente.

Representad gráficamente la trayectoria del cohete ( $z=z(x,y)$ ).

Dad en una pequeña tabla los valores de  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{r}$  al final de la primera fase.

### II.3 Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (subfases 1.0 y 1.1). Considerad los efectos de Coriolis, pero despreciad la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (en el sistema de referencia de la Tierra en rotación). Utilizando el método de Euler para integración, representad gráficamente los nuevos valores para la aceleración  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , la velocidad  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y la posición del cohete  $\vec{r} = (x, y, z)$  en función del tiempo a lo largo de la primera fase. Suponed que el lanzamiento se realiza desde Cabo Kennedy (US), de coordenadas latitud  $+28.5^\circ$ , y longitud latitud  $-80.605^\circ$ . Tened en cuenta el efecto Coriolis, pero no la fricción con el aire.

Representad gráficamente la trayectoria del cohete ( $z=z(x,y)$ ).

Dad en una pequeña tabla los valores de  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{r}$  al final de la primera fase

### II.4 Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la primera fase (subfases 1.0 y 1.1). Considerad los efectos de Coriolis, pero despreciad la fricción con el aire.

Considera el lanzamiento del cohete, partiendo de velocidad nula (en el sistema de referencia de la Tierra en rotación). Utilizando el método de Euler para integración, representad gráficamente los nuevos valores para la aceleración  $\vec{a}$ , la velocidad  $\vec{v}$  y la posición del cohete  $\vec{r}$  en función del tiempo a lo largo de la primera fase. Suponed que el lanzamiento se realiza desde Cabo Kennedy (US), y tened en cuenta el efecto de la fricción con el aire. Para ello consideraremos un modelo de fuerza de fricción  $\vec{F} = -b|\vec{v}|\vec{v}$ , con  $b = 0,5 A C_d \rho$ , donde A es el área,  $C_d$  es el coeficiente de drag, y  $\rho$  es la densidad atmosférica. Simplificando en exceso, supondremos que el producto  $A C_d = 200 m^2$  es constante y válido para todos los ejes.  $\rho$  frente a la altura sobre la superficie

terrestre viene dada según el modelo de atmósfera estándar, con la altura sobre la superficie terrestre,  $h$ , dada en metros:

- For height  $0 \leq h \leq 11 \text{ km}$ :  $\rho = 1,225000 \left(1 - \frac{6,5 \times 10^{-3} h}{288,16}\right)^{4,258645}$
- For height  $11 \text{ km} < h \leq 25 \text{ km}$ :  $\rho = 0,3642050 e^{-1,57603 \times 10^{-4} (h-11000)}$
- For height  $25 \text{ km} < h \leq 47 \text{ km}$ :  $\rho = 4,0095739 \times 10^{-2} \left(1 + \frac{3 \times 10^{-3} (h-25000)}{216,66}\right)^{-12,38211}$

Representad gráficamente la trayectoria del cohete ( $z=z(x,y)$ ).

Dad en una pequeña tabla los valores de  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{r}$  al final de la primera fase.

**II.5 Comparación de resultados** Comparad los resultados obtenidos en los anteriores apartados y analizad

los efectos de la aceleración por Coriolis y la fricción con el aire.

**II.6 Caída de componente.**

Si al final de la primera fase se desprende una pieza de 100 kg, determinad el lugar (coordenadas) de la Tierra donde caería.

### III. Lanzamiento de un cohete desde la superficie terrestre: Segunda fase.

**III.1 Evolución temporal de la aceleración, velocidad y posición durante la segunda fase (subfases 2.0, 2.1 y 2.2)**

Representad gráficamente los valores para la aceleración  $\vec{a}$ , la velocidad  $\vec{v}$  y la posición del cohete  $\vec{r}$  en función del tiempo a lo largo de la segunda fase. Tomad como valores iniciales los resultados del apartado II.4. Suponed que en este caso las toberas se rotan para que, en el sistema de referencia del cohete, la aceleración asociada al thrust venga dada por la siguiente expresión, con  $\alpha_1 = 65^\circ$ ,  $\alpha_2 = 138^\circ$ ,  $T_2$  y  $m$ , respectivamente, el empuje y la masa correspondiente a cada tiempo:

- $a_x = T_2/m \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2)$
- $a_y = T_2/m \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)$
- $a_z = T_2/m \cos(\alpha_1)$

Representad gráficamente la trayectoria del cohete ( $z=z(x,y)$ ). Tiene sentido considerar el efecto Coriolis en este caso? Y la fricción con el aire? Justificad vuestras respuestas.

### IV. Órbita de la carga útil.

Representad en coordenadas ecuatoriales la trayectoria final de la carga útil, correspondiente a la masa final tras la segunda fase. Es una órbita ligada? Es una órbita factible?

Determinad su perigeo, apogeo e inclinación.